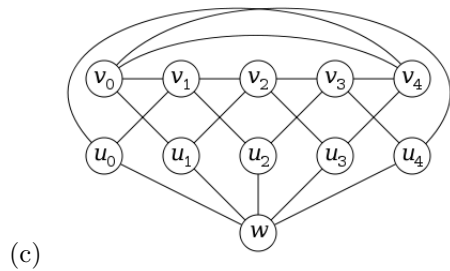
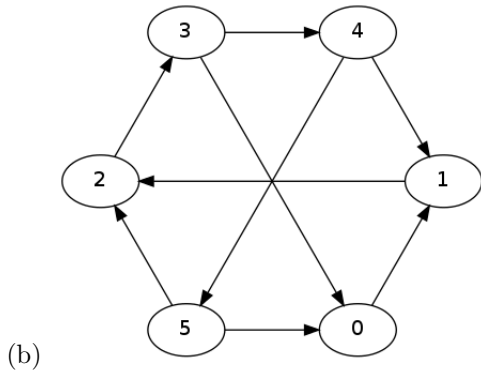
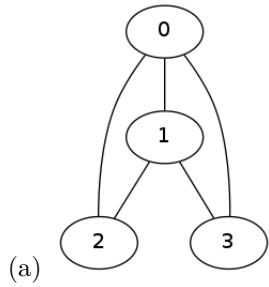


1 Invariantes

1. Calcule el número de clique y el número cromático de los siguientes grafos:



2. Encuentre y defina los siguientes conceptos y su correspondiente invariante:

- (a) Conjunto independiente \rightarrow Número de estabilidad (o número de independencia).
- (b) Conjunto dominante \rightarrow Número de dominancia.

2 Representación de Grafos y Estructuras Subyacentes

1. Complete la siguiente tabla:

	LL	MA	LA(L)	LA(A)	LA(H) _A	LA(H) _P
Espacio						
Insertar un nodo						
Insertar un lado						
Adyacencia de dos nodos						
Recorrer adyacencias						

donde:

- LL: Lista de Lados
 - MA: Matriz de Adyacencias
 - LA(L): Lista de Adyacencias (Lista)
 - LA(A): Lista de Adyacencias (Árboles binarios)
 - LA(H)_A: Lista de Adyacencias (Tablas de Hash), costo amortizado.
 - LA(H)_P: Lista de Adyacencias (Tablas de Hash), costo en peor caso.
2. Considere una estructura similar a la Matriz de Adyacencia, en la cual en vez de representar la relación de adyacencias, se representa la relación de incidencia. Dicha estructura la llamaremos la Matriz de Incidencia.

- (a) Complete la siguiente tabla:

	MAdy	MInc
Espacio		
Insertar un nodo		
Insertar un lado		
Adyacencia de dos nodos		
Recorrer adyacencias		

- (b) ¿Cuándo conviene usar una Matriz de Incidencia vs. una Matriz de Adyacencia?
 - (c) ¿Se puede implementar una estructura similar a una Lista de Adyacencia, pero con la misma modificación que dió origen a la Matriz de Incidencia? De ser cierto, ¿preserva la misma ventaja que ud. propuso en la respuesta de la pregunta (b)?
3. Lea la sección 3.4 del libro “Algorithms” (4ta edición) de Sedgewick y Wayne, y de ahí responda las siguientes preguntas:
 - (a) ¿Cuales son los componentes necesarios para implementar una Tabla de *Hash*?
 - (b) ¿Que características presenta una buena Función de *Hash*?
 - (c) Sedgewick y Wayne presentan un esquema para resolver desempates, denominado *Hash* por prueba lineal (*Linear Probing Hash*). ¿Qué diferencia tiene este esquema vs. el esquema visto en clase (*Hash* por partición en listas)?
 - (d) Las tablas de *hash* presentan un buen desempeño amortizado, pero no se ha discutido en gran escala el desempeño en peor tiempo de las operaciones de la tabla de *hash*. Explique porqué la diferencia de desempeño dependiendo del caso.
 - (e) ¿Qué ventajas y desventajas ofrecen las tablas de *hash* vs. otras estructuras que implementan un diccionario?

3 Modelado en Grafos

3.1 Notación a Usar

Recuerde que, para modelar un grafo, debe de especificar los dos componentes: los nodos y los lados. Si un grafo G está definido como una tupla (V, E) donde V son los vértices y E los lados, entonces debe de definir ambos conjuntos. Puede usar una notación semi-formal, donde los conjuntos, los elementos y aquellas restricciones que se puedan representar en un lenguaje establecido (por ejemplo, las restricciones numéricas) están definidos de manera formal, pero puede especificar restricciones relacionadas con el problema de manera verbosa.

- Considere que información desea usar para identificar unívocamente a cada nodo y cuales pueden no hacerlo. Puede usar dos posibles notaciones para representar información que no identifique unívocamente a un nodo:
 - Puede definir una función que reciba un nodo y devuelva el valor deseado.
 - Puede definir dado valor en el nodo, indicando explícitamente que ese valor no define el nodo.
- Con respecto al acceso de la información en los nodos/lados, se puede usar una notación similar a los lenguajes de programación orientados a objetos, en la cuál se puede hacer referencia al nodo/lado, seguido de un punto y el nombre especificado en la definición del conjunto correspondiente. Por ejemplo para el siguiente conjunto de nodos:

$$V = \{(x, y) | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\}$$

Se puede acceder al dato nombrado x en un nodo v como $v.x$.

3.1.1 Ejemplo de Modelado con la Notación

Considere el siguiente problema:

- “En la Universidad Simón Bolívar se practica un deporte muy peculiar, que pueden jugar varios equipos de 5 parejas en un duelo de altura (literalmente hablando), cada pareja con una etiqueta del 1 al 5. Un encuentro de ese deporte confronta a las parejas de misma etiqueta de cada equipo, en un lanzamiento vertical de uno de los integrantes de la pareja, a manos del otro. Una pareja gana si logra lanzar al correspondiente integrante más alto que la pareja del equipo rival y un equipo gana si tiene más parejas ganadoras que perdedoras. (*Por facilidad, no vamos a considerar empates. Siempre habrá un ganador y un perdedor.*)

Si se tiene un grupo de individuos, cada uno con su altura (en metros), peso (en kilogramos) y la fuerza que éste puede ejercer a un objeto de 1 kg, ¿Cuáles serían las parejas que permitan maximizar los lanzamientos verticales y así poder ganar lo más posible?” (*Suponga que la altura, el peso y la fuerza son números naturales y que el movimiento es con aceleración constante.*)

Para modelar este problema, se requiere definir los nodos y los lados. Se puede observar que el nodo sería el individuo, con posible información la altura, el peso y la fuerza correspondiente. Para separar los distintos individuos, vamos a etiquetarlos con un número que indique que tipo de individuo es. Como se puede observar, solamente el número de individuo define unívocamente al individuo en cuestión. Considerando eso, dicho conjunto sería el siguiente:

$$V = \{(ind, h, w, f) | ind \in \mathbb{N} \wedge h \in \mathbb{N} \wedge w \in \mathbb{N} \wedge f \in \mathbb{N}\}$$

considerando que, para dos elementos $v_1, v_2 \in V$, si $v_1 \neq v_2$, entonces $v_1.ind \neq v_2.ind$.

Los lados pudieran ser todas las posibles maneras de emparejar los individuos. Ya que un individuo lanza al otro, se puede modelar como un grafo dirigido, donde el primer individuo lanza al segundo. Se pudiera añadir un elemento a los lados indicando que tan lejos puede lanzar el primer individuo al segundo. Los lados quedarían así:

$$E = \{((e_1, e_2), d) | e_1 \in V \wedge e_2 \in V \wedge d \text{ es la distancia en que } e_1 \text{ lanza a } e_2\}$$

Ejercicio: Determine la fórmula de d en función de los elementos de e_1 y e_2 .

3.2 Ejercicios Resueltos

Para los siguientes problemas, proponga un modelo basado en grafos que represente el problema en cuestión.

1. Considere un sistema de transporte en masa compuesto por líneas y estaciones. Una línea está compuesta por una secuencia de estaciones y una estación puede hacer conexión a otra estación en otra línea. Ahora, considere que viajar entre estaciones de la misma línea toma 1 unidad de tiempo en recorrerse, mientras que las conexiones tienen 3 unidades de tiempo. Dadas dos estaciones, ¿cómo se calcula el menor tiempo entre ambas estaciones?
2. Hay tres vasos en la mesa: de 3, 5 y 8 cc. Las primeras dos están vacías mientras que la tercera tiene 8 cc de agua. Si solo puede pasar agua de vaso en vaso (pasando toda la cantidad posible), ¿existe alguna manera de tener exactamente 4 cc de agua en algún vaso?
3. Tres misioneros y tres caníbales deben cruzar un río usando un bote que pueden llevar a lo sumo dos personas. En cada lado del río, si hay misioneros, éstos deben superar o igualar a los caníbales en número (si hay más, los caníbales se comen a los misioneros) y además el bote no se puede mover por sí solo. ¿Existe alguna forma de poder mover a los misioneros y los caníbales para que puedan llegar al otro lado del río sin que no hayan pérdidas?
4. Considere las hojas de cálculo implementado por programas como Excel o LibreOffice Calc. En dichas hojas de cálculo, se tienen celdas que pueden ser o valores o fórmulas que hagan referencias a otras celdas.
 - (a) Un error que existe comúnmente es el de las referencias cíclicas, que ocurre cuando las fórmulas de dos celdas hacen que se llamen mutuamente. Proponga un algoritmo que permita detectar si existen referencias cíclicas.
 - (b) Proponga un algoritmo que permita determinar el orden de evaluación de dichas celdas.
5. Una red de computadoras es un conjunto de computadoras conectadas por cables. Como las conexiones son realizadas par a par, se usan dispositivos como los enrutadores que permiten que más de dos computadoras se puedan enlazar.
 - (a) Proponga un algoritmo que calcule el número mínimo de enrutadores que se debe trasversar para poder establecer comunicación entre dos computadoras.
 - (b) Proponga un algoritmo que determine la manera más eficiente en tiempo de poder dispersar mensajes de difusión en la red completa. (Probablemente será necesario guardar alguna información en el grafo para poder realizar dicho cálculo).
6. Considere el siguiente juego: Se tiene un tablero triangular de puntos, el cuál todos menos un punto están ocupadas por fichas (*dicho punto libre puede ser cualquiera, no es fijo*). El único movimiento disponible en el juego es que una ficha “coma” a otra y caiga en un espacio libre. El juego no acaba hasta que no se puedan realizar más movimientos. El objetivo tradicional del juego es que quede una sola ficha en el tablero, pero se pueden considerar retos en los cuales el objetivo es ver si se puede construir un tablero particular. Proponga un algoritmo que permita detectar si se puede llegar a dicho tablero y, de ser cierto, reconstruir los pasos necesarios para llegar a este tablero.

3.3 Ejercicios propuestos

Para los siguientes problemas, proponga un modelo basado en grafos que modele el problema y, en adición, responda cada sub-pregunta que observe:

1. Proponga un algoritmo que resuelva el caso general del ejercicio 2 de la parte anterior.
2. Proponga un algoritmo que resuelva el caso general del ejercicio 3 de la parte anterior.
3. Proponga un algoritmo que, dado un tablero del juego de La Vieja, saber si existe alguna secuencia de jugadas que permita que el jugador X gane al jugador O.
 - (a) Construya el grafo cuyo tablero inicial es el tablero vacío.

4. Una máquina de ventas da vuelto en el caso que el comprador ingrese más dinero del costo del producto a comprar.
- El vuelto es dado en billetes de 1, 2, 5, 10 y 50 unidades monetarias. Proponga un algoritmo que, dado el precio de un producto y una cantidad de dinero, diga que tantos billetes se ofrecen de vuelto. (*Considere que el precio de dicho producto y el dinero correspondiente son enteros.*)
 - Construya el grafo si el vuelto a entregar es de 25 BsF. Construya sólo hasta 4 niveles de grafo (mas explique cuales serían los caminos restantes.)
 - Si se elimina el billete de 1 unidad monetaria, no hay garantía de que se pueda dar vuelto (si hay que dar vuelto de 3 UMs, no es factible dar vuelto). ¿Cómo puede determinar ud. si el vuelto dado se puede satisfacer con los billetes dados en la pregunta (a), exceptuando el de 1 UM?
5. Considere un lenguaje de programación (con sintaxis similar a Java) en el que solo tenga asignación, condicionales de dos posibilidades (el `else` es obligatorio) y una instrucción de impresion. Una variable es considerada inútil si dicha variable no aparece en un lugar en que sea necesitada (que aparezca en una expresión o en un `print`). Proponga un algoritmo que consiga las variables inútiles del programa.
- Construya el grafo para el siguiente programa:

```

if (a < 2) {
    print b;
} else {
    c = d + 2;
}
print a;

```

6. Un dibujo se puede representar como una matriz de píxeles. Proponga un algoritmo que permita hacer la operación de llenado - reemplazar un área común de un mismo color por otro color. (*El dibujo es el grafo.*)
- Construya el grafo para la siguiente aproximación de dibujo:

```

*****
**  *  *  *  *  *  *
** **XX** **
*****XX*****
**  *  *  *  *  *
***  **  ***
****  ****
*****

```

7. Considere un grupo de estudiantes que cursan un laboratorio y la evaluación de éste es en parejas. Un estudiante puede indicar preferencia por uno o más estudiantes como posible compañero de laboratorio. Proponga un algoritmo que maximice el número de estudiantes emparejados.
- Construya el grafo para las siguientes preferencias:
 - Paula prefiere estar con Andrea.
 - Carolina prefiere estar con José o con Paula.
 - José prefiere estar con Leonor.
 - Leonor prefiere estar con Carolina, Tomás o Paula.
 - Tomás prefiere estar con Teresa.
 - A Teresa no le importa estar con cualquiera.

8. Un niño agarra la espalda de su padre (llena de pecas) y dibujando rayas usando las pecas como puntos, logró dibujar la Estatua de la Libertad. Lastimostamente, una de las pecas es una cicatriz, por lo que el dibujo era inválido :-(. Considere ahora que dicha espalda tiene una colección cualquiera de pecas, indicada por una posición (x, y) en un plano. ¿Cómo puede el niño conectar todas las pecas tal que use el menor número de tinta posible?

- (a) ¿Cuál sería el grafo si los puntos a considerar son los puntos $(2, 3)$, $(5, 1)$, $(2, 4)$ y $(3, 6)$?
9. Risk es un juego en el cual varios jugadores intentan conquistar el mundo. El tablero del juego es un mapa dividido en países o regiones hipotéticas. Durante un turno, el ejército instalado en una región solo puede atacar aquellos países que comparten una frontera. Al conquistar el país, se pueden mover tropas a dicho país. Durante una partida, un jugador comienza una secuencia de conquistas hasta llegar a la capital del contrinicante. Típicamente, el jugador elige países de tal manera que se pueda llegar a la capital enemiga en el menor número de países. ¿Cómo determinar dicho número?
 10. Una ciudad es cubierta por un número de estaciones de bomberos. Algunos residentes se quejan de que la distancia de sus hogares a la estación más cercana es muy lejana, por lo que se decide construir una nueva estación. Suponga que los hogares y las estaciones están ubicadas en intersecciones y que al menos hay un hogar por intersección. Dada la lista de las intersecciones donde se encuentran las estaciones de bomberos ya construídas, proponga un algoritmo que indique donde ubicar la nueva estación de tal forma que reduzca lo más posible la distancia de todas las casas a su estación cercana.
 11. Proponga un algoritmo que resuelva el problema de las 8 reinas: se tiene un tablero de ajedrez (de tamaño 8×8) y 8 reinas. ¿Cómo se pueden ubicar las 8 reinas de tal forma que ninguna se amenace?. De la misma forma, ¿se pueden ubicar las 8 reinas de tal forma que todas estén amenazadas simultáneamente?
 12. En el país de Distantistán, su capital se compone por calles e intersecciones. Cada calle conecta a 2 intersecciones. El shah de Distantistán quiere ubicar guardias en algunas intersecciones tal que todas las calles e intersecciones estén seguras. Un guardia en una intersección puede resguardar todas las calles e intersecciones que estén adyacentes a su intersección asignada... pero lamentablemente los guardias no se llevan bien. Si dos guardias cubren una calle, problemas habrán y peleas se formarán. Dado un mapa de las calles de la capital de Distantistán, proponga un algoritmo que suministre al shah el mínimo número de guardias que necesita para cubrir todas las calles e intersecciones de la capital real.
 13. Proponga un algoritmo que, dado un sitio web en el que todas las páginas pueden ser alcanzadas desde una página principal, determine el promedio del camino más corto (en número de páginas visitadas) entre dos nodos cualesquiera. (*Es el promedio de TODOS los caminos más cortos.*)
 14. Un paso de edición es una transformación de una palabra x a una palabra y , ambas pertenecientes a un diccionario tal que x puede ser transformada en y añadiendo, eliminando o cambiando una letra (por ejemplo, casa \Rightarrow cosa, pero \Rightarrow perro y talla \Rightarrow tala) y, además, x aparece antes que y según el orden estipulado en los diccionarios.

Una secuencia de edición es una secuencia de transformaciones es una secuencia de palabras w_1, w_2, \dots, w_n tal que la transformación de w_i a w_{i+1} es un paso de edición para todo i de 1 a $n - 1$. (*Observe que, al estar ordenadas lexicográficamente, no puede haber palabras repetidas.*)

Proponga un algoritmo que determine la secuencia de edición más larga en un diccionario dado.

- (a) Determine el grafo del siguiente diccionario: cat, dig, dog, fig, fin, fine, fog, log y wine.

15. A Miguel le gusta hacer *snowboarding* (¿a quién no? ;-), pero el *snowboarding* tiene dos detalles: el primer detalle es que para ganar velocidad, hay que descender por una montaña. El otro detalle es que cuando se llega al fondo de la colina, hay que subir caminando o esperar al teleférico.

Considere que la montaña es una matriz de números que indica la altura de cada punto. Por ejemplo:

1	2	3
8	9	4
7	6	5

Uno puede deslizarse de un punto a otro ssi la altura decrece y es vecino en la matriz. Por ejemplo, una posible vía para bajar podría ser 9, 2 y 1 pero puede ser también 9, 8, 7, \dots , 2, 1 (puede revisar que ésta es la vía más larga que puede hacer en este caso). Se desea buscar un algoritmo que, dada una montaña representada como una matriz, determine la vía más larga (para que Miguel pueda disfrutar más del *snowboarding* ;-).

- (a) Construya el grafo para el siguiente ejemplo:

56 14 51 58
26 24 39 41
24 16 8 51
38 5 23 9